2.10) $\Lambda([x_1 \dots x_m]^T) = \sum_{j=1}^{m} x_j v_j$

a) 1 Tomo $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^m$

$$\Lambda(v_1+v_2) = \sum_{j=1}^{m} (x_j+y_j) v_j = \sum_{j=1}^{m} x_j v_j + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j = \Lambda(v_1) + \Lambda(v_2) \checkmark$$

2 Tomo $v_1 \in \mathbb{K}^m$, $\lambda \in K$

$$\Lambda(\lambda v_1) = \sum_{j=1}^{m} (\lambda x_j) v_j = \lambda \cdot \sum_{j=1}^{m} x_j v_j = \lambda \cdot \Lambda(v_1) \checkmark$$

Es TL $\checkmark$

b) Para la imagen, busco los transformados de los canónicos de $\mathbb{K}^m$.

$\mathrm{Im}\,\Lambda = \langle \underbrace{T(1,0,\dots,0), \dots, T(0,\dots,1)}_{\dim = m} \rangle$, pero cuando

aplicamos TL a los canónicos queda que:

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\Lambda = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle}$$

c) 1. Para que sea monomorfismo, $Nu(\Lambda) = \{0\}$

$\to Nu(\Lambda) = \{0\} \to x_1 v_1 + \dots + x_m v_m = 0$, por lo tanto solo si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es LI la ecuación se cumple con $x_1, x_2.., x_m = 0$

y por lo tanto $Nu(\Lambda) = \{0\} \to$ es monomorfismo.

2. Para que sea epimorfismo $\to Im \Lambda = V$.

Por lo calculado en b):

$Im \Lambda = gen\{v_1, \dots, v_m\}$, entonces si $V = gen\{v_1, \dots, v_m\} \to$

$\to Im \Lambda = V \to$ es epimorfismo.

3. Para que sea isomorfismo, debe ser monomorfismo y epimorfismo. Por 1 vimos que es monomorfismo si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es LI, y por 2 que es epimorfismo si genera todo V. Por lo tanto si genera V y es LI, es una base. Y esta es la única forma de que sea isomorfismo.

d) $\{v_1, \dots, v_m\}$ base de V. $\to B = \{v_1, \dots, v_m\}$

$\boxed{\Lambda \circ \Phi = I_V}$

$\Phi = [v]_B$, $[v]_B = \{x_1, \dots, x_m\}$, $v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$

Entonces:

$$\Lambda \circ \Phi = \Lambda(\Phi(v)) = \Lambda([v]_B) = \sum_{j=1}^{m} x_j v_j = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m = v = \underline{I_V}$$

$$\boxed{\Phi \circ \Lambda = \Phi(\Lambda(v))} = \Phi(x_1 v_1 + \dots + x_m v_m) = \{x_1, \dots, x_m\} = \underline{I_{\mathbb{K}^m}}$$